



TITLE:

# $\vartheta$ -函数の性質について (線型微分方程式の変形理論とアー ベル函数論の拡張への新しい視点)

AUTHOR(S):

戸田, 盛和

---

CITATION:

戸田, 盛和.  $\vartheta$ -函数の性質について (線型微分方程式の変形理論とアーベル函数論の拡張への新しい視点). 数理解析研究所講究録 1980, 388: 72-83

ISSUE DATE:

1980-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104912>

RIGHT:

# $\varphi$ -函数の性質について

横浜国大工学部 戸田盛和

## §1. 非線形格子

扱われている 1 次元格子の波動についてどのように  $\varphi$ -函数に出会うかという話から始める。相互作用ポテンシャル

$$(1.1) \quad \phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar \quad (ab > 0)$$

で結ばれた質点 (質量  $m$ ) からなる 1 次元格子を考え、 $n$  番目の質点の変位を  $y_n$  とする。上式で  $r$  は相互変位で、

$$(1.2) \quad r_n = y_{n+1} - y_n$$

を意味する。この力学系の全エネルギーは

$$(1.3) \quad H = \frac{m}{2} \sum_n \dot{y}_n^2 + \sum \phi(r_n)$$

であるが、ここで  $r_n$  に共役な運動量  $S_n$  を導入すると

$$(1.4) \quad m \dot{y}_n = S_{n-1} - S_n$$

したがってハミルトン関数は

$$(1.5) \quad H = \frac{1}{2m} \sum_n (\dot{S}_{n-1} - \dot{S}_n)^2 + \sum_n \phi(r_n)$$

と表すことが示される。上の運動方程式は（ $\cdot$ は時間微分）

$$(1.6) \quad \begin{cases} \dot{r}_n = \frac{\partial H}{\partial S_n} = - \frac{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}{m} \\ \dot{S}_n = - \frac{\partial H}{\partial r_n} = - \phi'(r_n) \end{cases}$$

と書ける。ここで

$$(1.7) \quad f_n(r_n) = - \phi'(r_n) = a(e^{-br_n} - 1)$$

は相互作用による力を意味する。

(1.6) で  $S_n$  を消去すると  $r_n$  に対する式

$$(1.8) \quad m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a[2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}]$$

を得るが、これは (1.3) から得る  $y_n$  に対する運動方程式と

(1.2) で書きかえただけに過ぎない。

(1.6) で  $r_n$  を消去すると  $S_n$  に対する式を得る。その

うち (1.7) を考慮し (1.6) の2式から

$$(1.9) \quad r_n = -\frac{1}{b} \log\left(1 + \frac{1}{a} \dot{S}_n\right)$$

これを (1.6) の  $\dot{r}_1$  式に代入して  $S_n$  の運動方程式

$$(1.10) \quad \frac{m}{b} \frac{d}{dt} \log \left( 1 + \frac{1}{a} \dot{S}_n \right) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}$$

が得られる。さしに  $S_n$  を  $t$  で積分し

$$(1.11) \quad \dot{S}_n = \int^t S_n dt$$

とかくと

$$(1.12) \quad r_n = -\frac{1}{b} \log \left( 1 + \frac{1}{a} \ddot{S}_n \right)$$

$$(1.13) \quad \log \left( 1 + \frac{1}{a} \ddot{S}_n \right) = \frac{b}{m} (S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1})$$

また (1.11) の積分定数を適宜にとれば (1.4) から関係式

$$(1.14) \quad m y_n = S_{n-1} - S_n$$

$$(1.15) \quad m r_n = -(S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1})$$

を得る。

以下では単位を変換して

$$(1.16) \quad a = b = m = 1$$

にとる。運動方程式は

$$(1.17) \quad \log (1 + \ddot{S}_n) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}$$

と仮定する。

ここで、この体系に外から圧力が加わっていると考え  
てみる。外から一定の圧力  $f_{ext}$  が加わっているとすると  
これはハミルトニアンに  $f_{ext} \sum r_n$  をつけ加えるこ  
とになる。したがって  $r_n$  に対する可換 (1.8) は表わす方  
法で、 $S_n$  に対する可換は

$$(1.18) \quad \log(a' + \ddot{S}_n) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}$$

となる。ここで

$$(1.19) \quad a' = a + f_{ext} = 1 + f_{ext}$$

である。また、このとき (1.18) の左辺は相互変位

$$(1.20) \quad r_n = -\frac{1}{b} \log(a' + \ddot{S}_n)$$

を表わすことになる。

## §2. Jacobi の $\mathcal{Q}$ 関数との関係

(1.20) で

$$(2.1) \quad S_n = \log \psi_n$$

とあくと, 上の式は

$$(2.2) \quad \boxed{\frac{\psi_{n-1} \psi_{n+1}}{\psi_n^2} = a' + \frac{d^2}{dt^2} \log \psi_n}$$

と仮定.

ただし

$$(2.3) \quad u = \kappa n + \nu t$$

とあくと, Jacobi の  $\mathcal{J}$  函数  $\mathcal{J}_3$ , ある  $\mathcal{J}_4 (\equiv \mathcal{J}_0)$  に対する恒等式

$$(2.4) \quad \frac{\mathcal{J}(u-w)\mathcal{J}(u+w)}{\mathcal{J}(u)^2} = C(w) + A(w) \frac{d^2}{du^2} \log \mathcal{J}(u)$$

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}_3(u) \text{ ある } \mathcal{J}_4(u)$$

が思い出される.  $C(w), A(w)$  は  $u$  を含みません,  $w$  だけの函数である.

簡単のため  $\kappa$  は正とすると ( $a' = 1$ )  $w = \kappa$  とあす

$$(2.5) \quad \begin{cases} \psi_n = \frac{\mathcal{J}_0(u)}{C(\kappa)^{n^2/2}} \\ \nu^2 = \frac{A(\kappa)}{C(\kappa)} \end{cases}$$

が (2.2) の一つの解を与えることがわかる。関係式

$$(2.6) \quad \frac{d^2}{du^2} \log \mathcal{I}_0(u) = (2K)^2 \left\{ \operatorname{dn}^2(2Ku) - \frac{E}{K} \right\}$$

( $K, E$  はそれぞれ 1 種ある  $u$  の 2 種の完全楕円積分)

を思いだせば、この解は

$$(2.7) \quad e^{-r_{n-1}} = (2Kv)^2 \left[ \operatorname{dn}^2 \{ 2(n\pi + vt)K \} - \frac{E}{K} \right]$$

あるいは

$$(2.8) \quad r_n = -\log \left( 1 + (2Kv)^2 \left[ \operatorname{dn}^2 \{ 2(\kappa n + vt)K \} - \frac{E}{K} \right] \right)$$

と書ける, いわゆる格子 cnoidal 波であることがわかる。

ここで  $\kappa$  は波数で任意の定数であり, 楕円関数  $v$  は  $\kappa$  の関数として (2.5) から

$$(2.9) \quad v^2 = \frac{\operatorname{sn}^2(2K\kappa)}{(2K)^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{E}{K} \right) \operatorname{sn}^2(2K\kappa) \right\}}$$

のようにならなければならない。

この解 cnoidal 波は種類 (genus) 1 の  $\mathcal{I}$  関数で与えられるわけである。

genus が 2 あるのはより大さな  $\mathcal{I}$  関数の最も簡単なものは多変数  $\mathcal{I}$  関数である Riemann の  $\mathcal{I}$  関数である。これを用いて周期格子の波が表わされることは Date-Tanaka によって示されている。

一番簡単な周期格子と123個の質点からなるものを考え、  
そのうち一番簡単な運動と12

$$(2.10) \quad y_1 = -y_3, \quad y_2 = 0$$

を考えると,  $y_1$  あるいは  $y_3$  に対して解は

$$(2.11) \quad e^{-y} = 2\lambda_5\lambda_6 - 2(2k\nu)^2 k^2 \sin^2(\sqrt{\lambda_6^2 - \lambda_5^2} t - \delta)$$

となる

$$(2.12) \quad \nu = \frac{\sqrt{\lambda_6^2 - \lambda_5^2}}{2K(k)}$$

と書くと  $\nu$  は  $\lambda$  の関数である。ここに discriminant は

$$(2.13) \quad \Delta(\lambda) = 8\lambda^3 - 2(\hat{E} + 3)\lambda$$

( $\hat{E}$  は全エネルギー) であり,  $\Delta^2 - 4 = 0$  の根と小さい方  
から  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  としなす。  $\Delta(\lambda)$  は  
 $\lambda=0$  に対して反対称である。運動が反対称 ( $y_1 = -y_3$ ) である  
ため、このために、解は一個の  $\sin$  関数で表わされ  
た。この意味で、この解は  $g=2$  の場合と対応しているとい  
えるわけである。

より一般的に  $g \geq 2$  の場合を扱うには次節の方法が都合  
よいのであると思われる。



## §3 不連続時間の非線形格子

$\delta$  を小さな量とすると

$$(3.1) \quad \psi(t+\delta)\psi(t-\delta) = \psi^2 + \delta^2(\psi\ddot{\psi} - \dot{\psi}^2) + O(\delta^4) \\ = \psi^2\left(1 + \delta^2 \frac{d^2}{dt^2} \log \psi\right) + O(\delta^4)$$

である。したがって運動方程式 (2.2) は ( $a'=1$ )

$$(3.2) \quad \psi_{n+1}(t)\psi_{n-1}(t) - \psi_n^2(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^2} \{ \psi_n(t+\delta)\psi_n(t-\delta) - \psi_n^2(t) \}$$

となる。この方が (2.2) よりも計算には都合がいい場合が多いと思われる。

ここで  $\delta$  を有限に止めると

$$(3.3) \quad \psi_{n+1}(t)\psi_{n-1}(t) - \psi_n^2(t) = \frac{1}{\delta^2} \{ \psi_n(t+\delta)\psi_n(t-\delta) - \psi_n^2(t) \}$$

が考えられる。これは時間を不連続にした運動方程式で、非線形格子の拡張として極めて自然なものである。将来この方程式がさらに研究されることを望みたい。

この式は  $t$  にあつた  $\psi_n(t)$   $\psi_{n-1}(t)$   $\psi_{n+1}(t)$  を知つて  $\psi_n(t+\delta)$  を求める式と解釈できる。

$\psi_n = 1 + U_n$  とおいて  $|U_n| \ll 1$  とし、 $U_n$  について 1 次の項だけとれば、線形の式となる。

(例 i) ソリトン

$$(3.4) \quad \psi_n(t) = 1 + e^{2(\kappa n + \beta t)}$$

と仮定する

$$(3.5) \quad \sinh^2 \kappa = \frac{1}{\delta^2} \sinh^2(\beta \delta)$$

と (2) (3.3) の満足する。  $\delta \rightarrow 0$  の極限では

$$(3.6) \quad \beta^2 \rightarrow \sinh^2 \kappa$$

と仮定する。このとき  $\psi_n$  は次のようになる。

(3.7) cnoidal 波。  $C$  を定数として

$$(3.7) \quad \psi_n = \varphi_n / C^{n/2}$$

と仮定して (3.3) は

$$(3.8) \quad \frac{1}{C} \varphi_{n+1}(t) \varphi_{n-1}(t) - \varphi_n^2(t) = \frac{1}{\delta^2} \{ \varphi_n(t+\delta) \varphi_n(t-\delta) - \varphi_n^2(t) \}$$

となる。ここで  $\varphi \sim \mathcal{J}_3$  (あるいは  $\mathcal{J}_0$ ) とし、これに  
対する Liouville 定理

$$(3.9) \quad \mathcal{J}_3(u-\kappa|\tau) \mathcal{J}_3(u+\kappa|\tau) = \mathcal{J}_3(2\kappa|2\tau) \mathcal{J}_3(2u|2\tau) \\ + \mathcal{J}_2(2\kappa|2\tau) \mathcal{J}_2(2u|2\tau)$$

を用いる。ただし  $\tau$  は  $\mathcal{J}$ -関数の  $\tau$  である。

$$(3.10) \quad \begin{cases} \mathcal{J}_3(u) = \mathcal{J}_3(u|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i u m + \pi i \tau m^2} \\ \mathcal{J}_0(u) = \mathcal{J}_3(u + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\left\{ \mathcal{J}_2(u) = \mathcal{J}_2(u|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(m+\frac{1}{2})u + \pi i\tau(m+\frac{1}{2})^2} \right.$$

である。(3.9) を用いると (3.8) は  $u = \kappa\tau + \nu\delta$  に依り  
 $\mathcal{J}_3(2u|2\tau)$  の項と  $\mathcal{J}_2(2u|2\tau)$  の項との和に与る。こ  
 れぞれの係数は  $u$  を含みず、 $\kappa, \nu, \delta$  の函数である。こ  
 の項を分離すれば各係数から (あるいは  $\nu\delta$ )

$$(3.11) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C} \mathcal{J}_3(2\kappa|2\tau) - \mathcal{J}_3(0|2\tau) &= \frac{1}{\delta^2} \{ \mathcal{J}_3(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_3(0|2\tau) \} \\ \frac{1}{C} \mathcal{J}_2(2\kappa|2\tau) - \mathcal{J}_2(0|2\tau) &= \frac{1}{\delta^2} \{ \mathcal{J}_2(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_2(0|2\tau) \} \end{aligned} \right.$$

を得る。 $\kappa$  は与えられた任意定数で、この2式から2つの未  
 知量  $C$  と  $\nu$  とが定まられる。特に  $\nu$  は  $C$  を消去し  
 る式

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & -\mathcal{J}_2(2\kappa|2\tau)\mathcal{J}_3(0|2\tau) + \mathcal{J}_3(2\kappa|2\tau)\mathcal{J}_2(0|2\tau) \\ &= \frac{1}{\delta^2} \left[ \mathcal{J}_2(2\kappa|2\tau) \{ \mathcal{J}_3(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_3(0|2\tau) \} \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{J}_3(2\kappa|2\tau) \{ \mathcal{J}_2(2\nu\delta|2\tau) - \mathcal{J}_2(0|2\tau) \} \right] \end{aligned}$$

によつて、 $\kappa$  の函数として与えられる。これは  $\delta \rightarrow 0$  の  
 極限では (2.9) と一致するものがある。

## §4. 多変数の場合

## 函数

$$(4.1) \quad \mathcal{J}(u; s|\tau) = \sum_{m_1}^{\infty} \cdots \sum_{m_g}^{\infty} \exp \left[ 2\pi i \sum u_j \left( m_j + \frac{s_j}{2} \right) + \pi i \sum_{j,k} \tau_{j,k} \left( m_j + \frac{s_j}{2} \right) \left( m_k + \frac{s_k}{2} \right) \right]$$

を定義する. ここに  $s_j = 0, 1$  であり, すべて  $s_j = 0$  であるのは, これはふつうの Riemann  $\mathcal{J}$ -函数である. 以下の定理

$$(4.2) \quad \mathcal{J}(u-\kappa; s|\tau) \mathcal{J}(u+\kappa; s|\tau) = \sum_{\mu=0,1} \mathcal{J}(2\kappa; \mu|2\tau) \mathcal{J}(2u; s+\mu|2\tau)$$

はすぐ証明される. これは (3.9) の拡張である.

$$(4.3) \quad \varphi(u) = \mathcal{J}(u; 0|\tau)$$

と仮定して, これは (3.8) に入る,  $\mathcal{J}(2u; \mu|2\tau)$  の係数を両辺で等しいとよくと

$$(4.4) \quad \frac{1}{c} \mathcal{J}(2\kappa; \mu|2\tau) - \mathcal{J}(0; \mu|2\tau) = \frac{1}{\delta^2} \left\{ \mathcal{J}(2\kappa\delta; \mu|2\tau) - \mathcal{J}(0; \mu|2\tau) \right\}$$

を得る. これは  $\mu_1 = 0, 1; \mu_2 = 0, 1; \dots; \mu_g = 0, 1$  の  $2^g$  個の方程式である.

他方で各波数  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_g$  と, これらの波の強さを表わすパラメタ  $\tau_{11}, \tau_{22}, \dots, \tau_{gg}$  を与えられたものとする, 未知量は  $C, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_g$  および  $\tau_{jk} (j \neq k)$  である.  $\tau_{jk} = \tau_{kj}$  とすると未知量の数は

$$(4.5) \quad 1 + g + \frac{g(g-1)}{2} = 1 + \frac{g(g+1)}{2}$$

である.

$g=1$  および  $g=2$  に対しては

$$(4.6) \quad 2^g = 1 + \frac{g(g+1)}{2} \quad (g=1, 2)$$

であり, 方程式の数と未知量の数とが一致するから, 連立方程式 (4.4) は直ちに解を与える.  $g=1$  のときこれは cnoidal 波であり,  $g=2$  の場合は  $\nu_1, \nu_2$  と  $\tau_{12}$  および  $C$  が  $\kappa_1, \kappa_2, \tau_{11}, \tau_{22}$  の函数として定まる.

$g \geq 3$  の場合は

$$(4.7) \quad 2^g > 1 + \frac{g(g+1)}{2} \quad (g \geq 3)$$

である, 連立方程式は未知量よりも多くの方程式を含むことになる. 余剰分は  $\eta$ -函数に関する多数の恒等式を与えと見ているが, 確かではない. 即教示を仰ぎたく思う.